MATEMATICA ED EDUCAZIONE: IL RUOLO FONDAMENTALE DEI LINGUAGGI

Parte II

Comportamenti linguistici e difficoltà

Interpretazione dei dati

L'interpretazione delle difficoltà non è quasi mai univoca. L'interpretazione linguistica è spesso in concorrenza con altre interpretazioni come ad esempio quella, comune fra i matematici, che attribuisce, in forma più o meno sofisticata, tutte le difficoltà a lacune sui contenuti. Un altro modello diffuso è quello di cercare interpretazioni 'ad hoc', caso per caso. Se da un lato interpretazioni di questo tipo sono palesemente insufficienti e inutili, d'altra parte bisogna evitare atteggiamenti fondamentalisti che portano a usare un solo modello interpretativo in modo esasperato, come talvolta è accaduto nel settore dell'educazione matematica. Non intendo quindi usare esclusivamente modelli linguistici per spiegare tutte le difficoltà in matematica.

Molto spesso le difficoltà linguistiche si intrecciano con questioni relative a convinzioni e atteggiamenti, talvolta anche emozioni, dei soggetti nei confronti della matematica e del linguaggio stesso. Anche se cercherò quando opportuno di richiamare l'attenzione su questi intrecci, che sono a mio avviso di estremo rilievo, in questo seminario mi dedicherò soprattutto ad approfondire gli aspetti linguistici. Per approfondire gli aspetti relativi a convinzioni, emozioni e atteggiamenti rimando al seminario tenuto nell'a.a. 2001/02 da Rosetta Zan e Pietro Di Martino, alla bibliografia ivi presentata e agli ulteriori lavori dei relatori o di altri autori, come Furinghetti & Pehkonen (2000).

È fuori di dubbio che alcune difficoltà siano ascrivibili prevalentemente a lacune nelle conoscenze o nella concettualizzazione. Altre volte diverse interpretazioni sono possibili. Se uno studente scrive in un compito una formula come

$$(x+2)^2 = x^2+4$$

il suo comportamento può essere interpretato come mancanza di conoscenze di algebra, se ad esempio si pensa che abbia consapevolmente applicato una regola che ritiene corretta, oppure come inaccuratezza linguistica, se ad esempio si pensa che conoscesse la corretta regola per il quadrato di un binomio, e magari intendesse applicarla ma che non abbia controllato adeguatamente il testo prodotto. Questa seconda interpretazione può mettere in gioco altri fattori, come l'atteggiamento del soggetto nei confronti dei testi scritti e delle loro funzioni, e, in generale, della matematica.

In altri casi è più difficile interpretare i comportamenti in termini di mancanza di conoscenze. Il numero enorme e crescente di errori di segno che trovo nei compiti scritti di molte matricole della facoltà di Scienze M.F.N. può difficilmente essere spiegato soltanto in termini di mancanza di conoscenze di aritmetica. Molto più realisticamente si può pensare che il controllo di quegli studenti sulle loro produzioni scritte sia estremamente basso; in questo caso si tratterebbe di un problema di linguaggio (e di atteggiamenti nei confronti dei testi prodotti) piuttosto che di conoscenze.

Vediamo altri esempi di comportamenti linguistici significativi in cui più interpretazioni sono possibili.

<u>Esempio 1</u>

Il problema che segue è stato assegnato come prova d'esame per un corso di Matematica per Biologia, Chimica e Scienze Ambientali.

Per ogni numero reale k è dato il sistema seguente, nelle incognite x, y.

$$\begin{cases} x+3y=k \\ 2x+3ky=1 \end{cases}$$

Motivando le vostre risposte, determinate:
a) i valori di k, se esistono, per cui il sistema non ha soluzioni
b) i valori di k, se esistono, per cui il sistema ha infinite soluzioni
c) i valori di k, se esistono per cui il sistema ha una e una sola soluzione
d) la soluzione del sistema, se esiste, per k=1

Alcuni studenti hanno risposto come segue alla domanda b).

Il sistema ha infinite soluzioni se $-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$ e $-\frac{c}{b}=-\frac{c'}{b'}$.

Per $k = 2$ vale $-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$. Per $k = 1$ vale $-\frac{c}{b}=-\frac{c'}{b'}$.

Quindi il sistema ha infinite soluzioni per $k = 2$, $k = 1$.

Comportamenti di questo tipo sono diventati frequenti negli ultimi anni, e in misura crescente. Questo accade anche in situazioni più semplici, come la seguente. Alla richiesta

Determinate una frazione $\frac{m}{n}$ tale che $\frac{2}{5}<\frac{m}{n}<\frac{1}{2}$.

non è raro trovare risposte come

$$\frac{m}{n}=\frac{3}{5} \text{ e } \frac{m}{n}=\frac{1}{3}$$

In termini logici, questi comportamenti sono collegati all'interpretazione di una formula del tipo $\exists x(A\wedge B)$ come se fosse la formula non equivalente $\exists xA\wedge\exists xB$. L'esempio iniziale può essere interpretato sul piano della comprensione dei contenuti ("*non ha capito i sistemi lineari*"), su quello della logica o su quello linguistico, al livello della gestione del testo e della sua coesione. È evidente che se le sue conoscenze linguistiche o i suoi atteggiamenti verso i linguaggi o verso la matematica inducono lo studente a leggere i testi in modo superficiale e approssimativo, ogni altra interpretazione perde di rilevanza: anche se imparasse la logica o i sistemi lineari, questo non avrebbe necessariamente effetti sulle sue strategie di lettura dei testi e quindi sulle sue prestazioni.

<u>Esempio 2</u>
Il problema è lo stesso dell'esempio 1. Alcuni studenti hanno risposto correttamente alle domande a), b), d), con motivazioni apparentemente ragionevoli, ma alla domanda c) hanno risposto che non esistono valori di k per cui il sistema ha una e una sola soluzione. Questa risposta sembra contraddittoria con la risposta (in apparenza corretta) alla domanda d). Ulteriori indagini hanno mostrato che per quegli studenti la scrittura

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$$

non rappresenta una soluzione ma due. Qui probabilmente non è un problema di contenuti in senso stretto, scolastico, dato che gli studenti hanno mostrato (in relazione alle altre domande) discrete conoscenze e abilità sul tema. L'episodio può essere interpretato in termini di processi di concettualizzazione o sul piano del linguaggio.

La prima interpretazione potrebbe mettere in luce il mancato 'incapsulamento' del concetto di coppia ordinata, per cui $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ non è percepita nella sua globalità ma come due oggetti separati.

Questa interpretazione ha una controparte linguistica: gli studenti possono non aver percepito la

funzione delle parentesi, interpretando la scrittura

$$\left(0, \frac{1}{3}\right)$$

come 0, $\frac{1}{3}$.

Questo è uno dei casi in cui il coordinamento dei sistemi di rappresentazione avrebbe potuto essere d'aiuto. Avere in mente una rappresentazione grafica (e saperla controllare anche in misura minima) avrebbe consentito agli studenti di vedere che <u>due</u> numeri corrispondono a <u>un</u> punto del piano cartesiano.

Nell'analizzare le prestazioni linguistiche bisogna aver presente che esistono diversi livelli di controllo semantico su un testo. Molti comportamenti dipendono da tale livello. Questa pluralità di livelli talvolta non emerge in sede scolastica, specialmente se si attribuisce valore preponderante ai contenuti. Vediamo un esempio di compito funzionale a questo scopo. L'esempio è tratto da Ferrari (2001).

<u>Esempio 3</u>

Consideriamo il problema che segue, assegnato a matricole di Informatica.

(3A) Scrivete una formula che per ogni intero positivo n calcoli il valore della somma di tutti gli interi positivi minori o uguali a 2n.

(3B) Scrivete una formula che per ogni intero positivo n calcoli il valore della somma di tutti gli interi positivi compresi fra n e 2n (estremi inclusi).

Entrambi i problemi sono stati dati come applicazione della formula di Gauss sulla somma dei primi n interi positivi. Il problema (3A) è tipicamente risolto da un numero di studenti molto maggiore rispetto a (3B). Nel caso delle matricole di informatica gli studenti si sono spesso suddivisi in tre gruppi all'incirca della stessa consistenza. Gli studenti del primo gruppo sembrano non andare oltre un apprendimento mnemonico della formula di Gauss

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

e rimangono bloccati davanti a entrambi i problemi. Quelli del secondo gruppo si rendono conto che per risolvere a) è sufficiente sostituire ogni occorrenza di n con $2n$, ma non sanno risolvere b). Tale sostituzione non richiede un pieno controllo sulle espressioni simboliche in gioco, in quanto ci sono studenti che risolvono (3A) in modo adeguato ma scrivono formule come

$$\sum_{i=1}^{2n} i = \frac{2n(2n+n)}{2}$$

come applicazioni di (*) per risolvere (3B), mostrando uno scarso controllo sui significati dei parametri che occorrono nella formula.

Quelli del terzo gruppo utilizzano formule come

$$\sum_{i=n}^{2n} i = \sum_{i=1}^{2n} i - \sum_{i=1}^{n-1} i$$

mostrando una maggior padronanza dei significati delle espressioni in gioco, anche nei casi in cui le loro risposte contengono qualche imprecisione. Con il problema (3B), che senza dubbio è più arduo di (3A), ci sono meno possibilità di arrivare a una soluzione senza prendere in considerazione i significati delle espressioni in gioco.

La stessa situazione potrebbe essere interpretata in termini di padronanza concettuale sui contenuti in gioco (ad esempio, in base alla teoria APOS[1] di Dubinsky, 1991). A mio giudizio, tuttavia, questo è uno dei casi in cui la capacità di maneggiare le notazioni senza perdere del tutto il contatto con i significati è prioritaria sul resto. Chi non sapesse usare il simbolo di sommatoria collegandolo al suo significato elementare incontrerebbe serie difficoltà anche nel rappresentare i risultati eventuali delle proprie concettualizzazioni.

Esempio 4
Questo problema è stato dato (con formulazioni leggermente diverse) a diversi campioni di studenti di fascia scolare compresa tra la II media e il I anno dell'università.

a) *Trova due interi m, n (n≠0) tali che* $\frac{4}{5} < \frac{m}{n} < \frac{5}{6}$.

b) *Trova un numero decimale x tale che* $0.81 < x < 0.82$.

Come è ovvio, le percentuali di successo su questo problema dipendono fortemente dalla fascia d'età, il tipo di scuola ecc.. Un dato comune a tutti i campioni è una netta differenza nelle percentuali di risposte adeguate a favore di b). In tutti i campioni c'è un numero rilevante di soggetti che sanno risolvere b) ma non a). In una II media, su 30 alunni nessuno sa risolvere a), mentre 18 sanno risolvere b). In una coppia di classi di II liceo, su 57 alunni, 27 sanno risolvere a) e 54 sanno risolvere b). In una V liceo 20 su 38 sanno risolvere a) mentre 35 sanno risolvere b). All'inizio dell'università questo problema è stato dato ripetutamente a diversi campioni, con percentuali di successo oscillanti tra 60 e 80% per la domanda a) e sempre oltre 90% per la domanda b). È evidente che per rispondere ad a) in modo appropriato è sufficiente convertire in frazione la risposta data a b). È anche possibile che il problema b) sia risolto mediante strategie che richiedono poco controllo semantico. In ogni caso un numero rilevante di soggetti sanno risolvere b) e saprebbero convertire frazioni in decimali ma non riescono ugualmente a risolvere a).

Se si considerano 'numeri decimali' e 'frazioni' come argomenti distinti, allora questa difficoltà può essere interpretata in relazione ai contenuti. Se invece li consideriamo come diverse rappresentazioni, allora è possibile domandarsi quali caratteristiche influenzano i comportamenti degli studenti. È evidente che la notazione decimale mette in luce le proprietà di ordinamento (o, analogamente, offre algoritmi più efficaci per trattare gli ordinamenti). Questo tuttavia non è una spiegazione sufficiente, perché nessuna delle due notazioni incarna il divieto di passare a un'altra. In questo caso entrano in gioco le convinzioni degli studenti (in buona parte incoraggiate dalle pratiche scolastiche), in base alle quali, anche se 'numeri decimali' e 'frazioni' non sono contenuti distinti, sono considerati come tali dagli studenti e viene ritenuta scolasticamente scorretta la mossa di convertire una rappresentazione da una notazione all'altra.

Complessità delle funzioni dei linguaggi

Gli esempi successivi sono finalizzati a mettere in luce la complessità dei ruoli che i linguaggi giocano nelle prestazioni degli studenti.

Esempio 5
Questo esempio mostra che l'interpretazione di testi anche semplici è influenzata dalla complessità del contesto in cui sono inseriti. Ad esempio, un problema come

[1] È una teoria neo-Piagetiana che studia la transizione da Azioni a Processi interiorizzati, a Oggetti mentali e a Schemi.

(5A) *Trovate un polinomio a coefficienti reali p tale che:*

(a) il grado di p è 2;

(b) p ha almeno una radice reale;

(c) p ha almeno due radici intere.

è risolto agevolmente da quasi tutte le matricole di Informatica, dopo un breve modulo sui polinomi a coefficienti reali. L'unica difficoltà risiede nell'interpretazione delle parole 'reale' e 'intere', il che richiede un minimo di accuratezza in quanto è necessario adottare l'uso matematico (in base al quale un intero è anche un reale) piuttosto che schemi conversazionali (in base ai quali l'uso congiunto dei due aggettivi suggerisce l'implicatura che 'reale' significhi 'non intero').
Se noi inseriamo le stesse parole in una situazione più complessa, come il problema (5B), i comportamenti degli studenti sono molto diversi.

(5B) *Trovate un polinomio a coefficienti reali p tale che:*

(a) il grado di p è 4;

(b) p ha almeno una radice reale;

(c) p ha almeno due radici intere;

(d) p ha almeno una radice complessa non reale.

Problemi come questo di solito sono risolti correttamente da meno del 60% di ogni campione di matricole. La principale sorgente di difficoltà sta nel mancato riconoscimento del fatto che ogni radice intera è anche una radice reale. Un buon numero di studenti che applicano con successo questa proprietà in problemi come (5A) sembrano incapaci di usarla in questo problema. Sembra quindi difficile attribuire questi episodi a mancanza di conoscenze sulle inclusioni fra gli insiemi numerici. Non convincono nemmeno le interpretazioni, peraltro ragionevoli, di chi ritiene che la disposizione grafica delle voci (a), (b), (c), … (che fa pensare a un elenco) sia tale da mettere fuori strada facendo intendere che si tratta di radici diverse. Questo dovrebbe infatti accadere per entrambi i problemi. In (5B) l'attenzione degli studenti è probabilmente attirata dalla condizione (d), che richiede l'applicazione di un teorema[2] che considerano importante e difficile. Questa condizione viene interpretata in modo relativamente sofisticato, in quanto molti studenti, benché si parli di una sola radice complessa (non reale), comprendono che le radici complesse (non reali) devono essere due. L'interpretazione di 'reale' e 'intero' non è vista come un punto focale del problema ed è eseguita in base a schemi conversazionali. Probabilmente nel caso del problema (5A) gli studenti, in mancanza di un punto focale ben riconoscibile hanno interpretato tutte le condizioni in base agli usi matematici.

<u>Esempio 6</u>

Questo esempio, piuttosto complesso, è tratto da una prova scritta del corso di Algebra (per Matematica e Applicazioni), tenuta nella primavera del 2003.

[2] "Dato un polinomio reale *p*, se un numero complesso *z* è radice di *p*, allora anche il suo coniugato $\overline{z}$ è radice di *p*."

3) Considerate l'anello $\mathbb{R}[X]$ e l'insieme $A=\{f\in\mathbb{R}[X] \mid (X\text{-}1) \text{ divide } f\}$.

a) È vero che A è un sottogruppo di $\mathbb{R}[X]$? $\bar{o} = \{0, -, +\}$ sì

$f(0)=0 \quad X-1/0$!

$f(-x)=-f(x) \quad X-1/f \rightarrow X-1/-f$!

$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad X-1/f+f' \rightarrow X-1/f \wedge X-1/f'$!

b) È vero che A è un sottoanello di $\mathbb{R}[X]$? No

verificato che è un sottogruppo, è sufficiente verificare se sia chiuso rispetto al prodotto

$f(x \cdot y)=f(x)\cdot f(y) \quad X-1/f\cdot f' \quad X-1/f \vee X-1/f'$

c) È vero che A è un ideale di $\mathbb{R}[X]$? sì

$\exists y \notin (\text{ideale}) A: \ X-1/f\cdot a$ perché $X-1/f$ qualunque sia a

L'interpretazione del testo prodotto non è immediata. La parte a sinistra del testo di Alessia (domanda a)) sembra rivolta a verificare che *f* è un omomorfismo di anelli. La parte di destra sembra far riferimento al testo del problema, anche se solo le prime due righe sono corrette. Le due parti di testo (lato destro e lato sinistro) sono comunque in contraddizione. Come possiamo interpretare questo protocollo? Che cosa ci dice direttamente e di quali informazioni esterne abbiamo bisogno?

Le interpretazioni possibili sono molte. Quelle di tipo tradizionale, che mettono al centro contenuti, addestramento e impegno (e.g., *"Non sa fare gli esercizi, non ne ha fatti abbastanza", "Non ha capito/studiato niente di algebra", "Non ha capito/studiato la definizione delle strutture algebriche", "Non ha capito/studiato i polinomi o li confonde con gli omomorfismi"*) e quelle *ad hoc* (e.g., *"Si è distratta", "Si è espressa male", "Ha risposto a caso"*) sono chiaramente insufficienti. Alcune di esse suggeriscono strategie di recupero diverse, altre non suggeriscono nulla. Un'analisi più attenta del testo mostra una certa cura: la grafia è abbastanza chiara, i simboli sono utilizzati abbastanza propriamente, le frasi verbali abbastanza corrette. Le caratteristiche del testo sono coerenti con quelle personali di Alessia, che è ritenuta una studentessa molto brava dai suoi vecchi professori di liceo e dai compagni di università. Questo induce a escludere che abbia risposto a caso o che non abbia dedicato tempo alla preparazione. In un colloquio orale svolto immediatamente dopo la prova scritta Alessia ha mostrato una discreta padronanza dell'argomento e ha saputo ricostruire la soluzione adeguata senza troppa fatica, seppure con qualche aiuto. Durante il colloquio ha fatto prevalentemente riferimento alla parte destra del suo elaborato (che è l'unica marcata all'inizio da '!'). Alla domanda "Perché hai scritto il pezzo di sinistra?" ha risposto che per lei quello era una specie di promemoria, e che lei, quando comincia a scrivere in quel modo, perde usualmente la capacità di controllare i significati.

Va notato che probabilmente la scrittura di sinistra induce Alessia a sbagliare quella di destra. La formula utilizzata per la chiusura di *A* rispetto alla somma è una formula (in generale falsa) che è la reciproca di quella corretta. Non è escluso che l'errore sia stato indotto dall'analogia con la scrittura di sinistra, in cui il termine *f(x+y)* ("l'immagine della somma") sta alla sinistra del simbolo di uguaglianza. Va ancora notato che la formula utilizzata per la chiusura di *A* rispetto al prodotto è incompleta (non è indicata nessuna relazione fra le due formule) e presenta una correzione a penna (probabilmente un '$\vee$' in luogo di un '$\wedge$') che rompe l'analogia con la formula per la somma. In questo caso Alessia probabilmente continua a lasciarsi fuorviare dalla scrittura di sinistra ma mostra sensibilità per il significato matematico, seppur perdendo del tutto di vista il problema originario. Forse l'assenza dalle ultime righe del segno '!' testimonia il suo disagio. Inoltre, nell'ultima riga si può trovare un'orgia di comportamenti linguistici interessanti:

- una distrazione vera e propria (*y* diventa *a*);

- un quantificatore esistenziale usato a sproposito (semmai serviva universale);
- la condizione di non appartenenza ad A (nella definizione ovviamente non c'è, e Alessia, se richiesta di dare la definizione a voce, non la aggiunge);
- l'apposizione '(ideale)' aggiunta nella formula;
- l'uso di 'perché' invece della freccia usuale;
- 'qualunque sia a', in contraddizione con il quantificatore esistenziale iniziale.

Sembra evidente che i problemi di Alessia non sono dovuti soltanto alla pura e semplice mancanza di competenze linguistiche o di conoscenza delle notazioni matematiche. Piuttosto, Alessia non riesce a esercitare un controllo metalinguistico adeguato sui testi scritti. Questa considerazione va precisata, in quanto la studentessa mostra di controllare discretamente alcuni aspetti dei suoi testi scritti (almeno in confronto a molti altri studenti) e riesce decisamente meglio in quelli orali. Quello che sembra mancarle è il controllo sugli scopi dei testi scritti, ai quali sembra attribuire funzioni drasticamente diverse da quelle usuali in educazione matematica. Per lei probabilmente non è ovvio che un testo scritto in occasione di un esame debba contenere affermazioni vere e difendibili. Inoltre non sembra per nulla preoccupata dell'uso palesemente incoerente del simbolo f nelle due parti del testo. Per lei i testi hanno funzioni di promemoria privato o fanno parte di non ben identificati rituali scolastici necessari per ottenere riconoscimenti, e non sono invece prodotti di dominio pubblico, potenziali oggetti di verifica semantica.

Per sviluppare questa analisi abbiamo avuto bisogno di informazioni su Alessia; solo alcune di queste sono state ricavate dal testo. Testi sostanzialmente equivalenti dal punto di vista dei contenuti, magari con una grafia più trasandata, e con un uso meno puntiglioso dei simboli sono molto comuni fra le matricole di informatica, e sono generalmente dovuti a risposte date a caso o scopiazzate dagli appunti; questi comportamenti indicano atteggiamenti di assoluto disinteresse nei confronti della matematica o convinzioni improprie sulla natura degli esami e sul modo di superarli. È evidente che le strategie di recupero nei due casi sono nettamente diverse.

<u>Esempio 7</u>

In occasione della fase provinciale delle Olimpiadi matematiche 2002-2003 un gruppo di studenti dell'ultimo anno del liceo scientifico (che avevano superato la fase di selezione a livello di istituto) dovevano affrontare, in un test a risposta multipla, un semplice problema di combinatoria che portava al calcolo di due numeri, dei quali gli studenti dovevano individuare (fra le risposte multiple) la differenza.

Tutti gli studenti hanno trovato correttamente che i numeri richiesti erano $10^3 \cdot 22^4$ e $10^4 \cdot 22^3$. Nessuno di loro è stato in grado di riconoscere fra le scelte proposte che la differenza era $12 \cdot 10^3 \cdot 22^3$. Molti di loro si sono rammaricati di non poter usare una calcolatrice tascabile.

Dopo la fine della prova gli stessi studenti sono stati richiesti di esaminare l'espressione $a^3 \cdot b^4 - a^4 \cdot b^3$. Immediatamente l'hanno fattorizzata in $a^3 \cdot b^3 \cdot (b-a)$ e hanno subito trovato anche la risposta al problema originale.

L'espressione

$$10^3 \cdot 22^4 - 10^4 \cdot 22^3 \qquad \text{(E1)}$$

è collegata al quadro specifico dei numeri interi, mentre

$$a^3 \cdot b^4 - a^4 \cdot b^3 \qquad \text{(E2)}$$

è, almeno in principio, più generale. Ma gli studenti hanno interpretato E1 nel copione[3] 'Calcoli aritmetici' (o, forse, 'Uso della calcolatrice') ed E2 nel copione 'Scomposizione di polinomi' e hanno cercato di applicare i metodi corrispondenti. La presenza di lettere in E2 è servita a impedire loro di svolgere effettivamente un calcolo e ha suggerito loro di prendere in considerazione una

[3] Un copione (*script*) è uno dei diversi modi di rappresentare la conoscenza che fa da sfondo alla produzione o all'interpretazione di un testo. Più precisamente, è una struttura di dati specializzata a trattare sequenze stereotipate di eventi.

regola di fattorizzazione nota, che era più o meno la sola cosa che potevano fare a quel livello. In linea di principio non c'è nulla in E1 che impedisca agli studenti di applicare la regola di scomposizione, e, probabilmente, la scrittura adottata è stata scelta con lo scopo di suggerirla. Se consideriamo E1 ed E2 come espressioni di un sistema simbolico (ad esempio, un linguaggio del I ordine), vediamo che E2 è più generale di E1 e che fra le due espressioni c'è un legame chiaro e alla portata di molti studenti: E1 si ricava da E2 grazie alle sostituzioni [a|10], [b|22]. Ma se le espressioni simboliche (o, più in generale, dei testi, compresi quelli verbali) vengono usati per evocare copioni, con poca attenzione per la forma linguistica, allora diventa meno semplice distinguere quale delle due espressioni è più generale, e anche i loro legami reciproci diventano molto più difficili da individuare.
L'esempio mostra che ciascuna rappresentazione non solo mette in luce alcune proprietà dei concetti da rappresentare, oscurandone altre (come nell'esempio 4), ma può anche richiamare copioni, cioè processi che vanno ben oltre la dimensione linguistica. Il riferimento a copioni è in parte inevitabile; se questo avviene in modo rigido e in assenza di controllo semantico, siamo davanti a un modello di uso poco flessibile dei linguaggi, che mostra chiaramente che le rappresentazioni e i linguaggi in generale sono molto lontani da essere veicoli neutrali di significati già costruiti in precedenza. Questi comportamenti mettono in gioco non solo le conoscenze e le abilità degli studenti, ma anche le loro convinzioni e i loro atteggiamenti. La convinzione, spesso implicita, che la lettura accurata dei testi sia poco rilevante porta ad atteggiamenti di disinteresse e di scarsa attenzione.

<u>Esempio 8</u>
Vediamo un esempio tratto da Ferrari (2003a).

Collega con un tratto di penna ciascuna frase di sinistra con la frase o le frasi di destra che hanno significato equivalente:

a) Non tutti gli operai della fabbrica sono italiani	a') Tutti gli operai della fabbrica sono stranieri
	b') Alcuni operai della fabbrica sono italiani
b) Nessun operaio della fabbrica è italiano	
	c') Tutti gli operai della fabbrica sono italiani
c) Non tutti gli operai della fabbrica non sono italiani	d') Alcuni operai della fabbrica sono stranieri

Prove di questo tipo sono state assegnate a svariati campioni, dalla scuola media inferiore all'università. In tutti i campioni (compresi gli universitari) la maggior parte dei soggetti ha operato adeguatamente a proposito dell'enunciato b), ma molti hanno associato ad a) entrambi gli enunciati b'), d'). Lo stesso è accaduto per c). Gli esiti di questa prova sono stati influenzati abbastanza poco dall'età e dal livello scolare dei soggetti.
Rispetto a b), l'enunciato a') è equivalente dal punto di vista sia dell'interpretazione quotidiana sia di quella matematica. Per gli enunciati a), c) la situazione è meno semplice. Dal punto di vista logico-matematico, d') è l'equivalente di a). Dallo stesso punto di vista, b') non è equivalente ad a), e nemmeno una sua conseguenza logica. Tuttavia è una sua implicatura[4] conversazionale: se viene affermato a) e si suppone che l'affermazione sia appropriata al contesto e agli scopi comunicativi, allora si può ritenere che sia vero b'), perché in caso contrario l'affermazione a) resterebbe vera ma

[4] Un'*implicatura* è quella parte di informazione ricavabile da un testo che non deriva dal suo contenuto dichiarativo ma dall'ipotesi che il testo sia adeguato al contesto; per maggiori informazioni vedere il glossario.

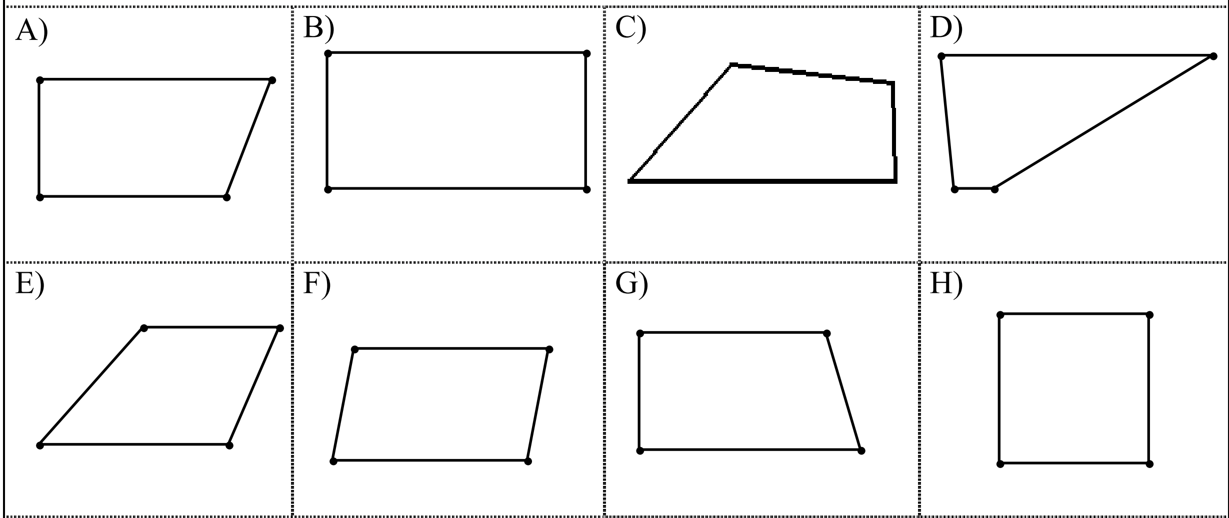
sarebbe inadeguata dal punto di vista comunicativo, comunque meno appropriata di a’). In altre parole, la risposta viene ricavata dal fatto che sia stata usata a) invece (ad esempio) di a’). Il legame che alcuni alunni riconoscono tra a) e b’) non sta quindi nel contenuto di a) (quale ricavabile dall’interpretazione basata su grammatica e dizionario) ma nella sua relazione con il contesto, in particolare dall’ipotesi che lo scrivente stia comportandosi in modo cooperativo.

Esempio 9

Il problema che segue[5] è stato svolto in diverse classi di scuola media che avevano già affrontato l’argomento ‘trapezi’ e nei cui libri di testo un trapezio viene descritto come ‘quadrilatero avente almeno una coppia di lati paralleli’.

Problema

Secondo voi, quali delle seguenti figure sono trapezi?



Spiega le tue risposte.

Questo problema mette in gioco la questione del controllo concettuale sulle immagini. Le risposte si possono suddividere in due categorie: quelle che fanno riferimento a una definizione verbale e quelle che dipendono da stereotipi visuali o linguistici.

Nel primo caso punti critici sono i disegni B, F, H. Un buon numero di alunni ha sbagliato soltanto nel classificare uno o più di essi mentre ha classificato in modo soddisfacente i disegni A, C, D, E, G. Anche in base ai commenti verbalizzati e alle discussioni successive fra gli alunni, sembra ragionevole ipotizzare che questi alunni abbiano applicato la definizione correttamente ma in base agli usi conversazionali, per i quali ‘trapezio’ non può efficacemente denotare un parallelogramma o un rettangolo, o un quadrato (in quanto viola i principi di cooperazione), mentre nel linguaggio matematico questo può accadere.

Nel secondo caso punti critici sono anche i disegni A, C, D, E. Visto che A, D, E sono trapezi la cui forma non è immediatamente riconducibile allo stereotipo, essi possono essere non riconosciuti da alunni con scarso controllo concettuale dell’idea di trapezio. Il disegno C rappresenta invece un quadrilatero che non è un trapezio ma la cui forma è poco distante dallo stereotipo e che consente inoltre di identificare gli elementi fondamentali dello stereotipo linguistico (base maggiore, base minore, lati obliqui, …). La prosecuzione di questa esperienza (e altre esperienze dello stesso tipo) indicano che i comportamenti del primo tipo non corrispondono necessariamente a gravi lacune linguistiche o matematiche: gli alunni semplicemente applicano pratiche interpretative tipiche dei registri quotidiani a un contesto che ne richiederebbe altre, ma sono probabilmente in grado di estendere le loro risorse linguistiche fino a inglobare progressivamente il nuovo registro. Al contrario, la difficoltà nel confrontare il linguaggio con semplici modelli, e controllare la verità di affermazioni è spesso indice di lacune linguistiche più gravi, legate alla difficoltà di interpretare i

[5] Questo esempio è tratto con minime variazioni da Ferrari (2003a)

testi in quanto tali e di coordinare l'interpretazione delle frasi e alla pratica di utilizzare i testi al più come contenitori di parole-chiave. Questo esempio mette in luce come fenomeni pragmatici (cooperazione ecc.) investano anche la componente figurale; mostra anche che l'applicazione di definizioni anche semplici è lontana da essere un processo a costo zero, come sembrano talvolta pensare alcuni matematici.

Esempio 10

Questo problema è stato assegnato in una prova intermedia a un campione di 150 matricole dei corsi di Biologia, Chimica, Scienze Ambientali e Gestione del Territorio della Facoltà di Scienze dell'Università degli Studi del Piemonte Orientale ad Alessandria.

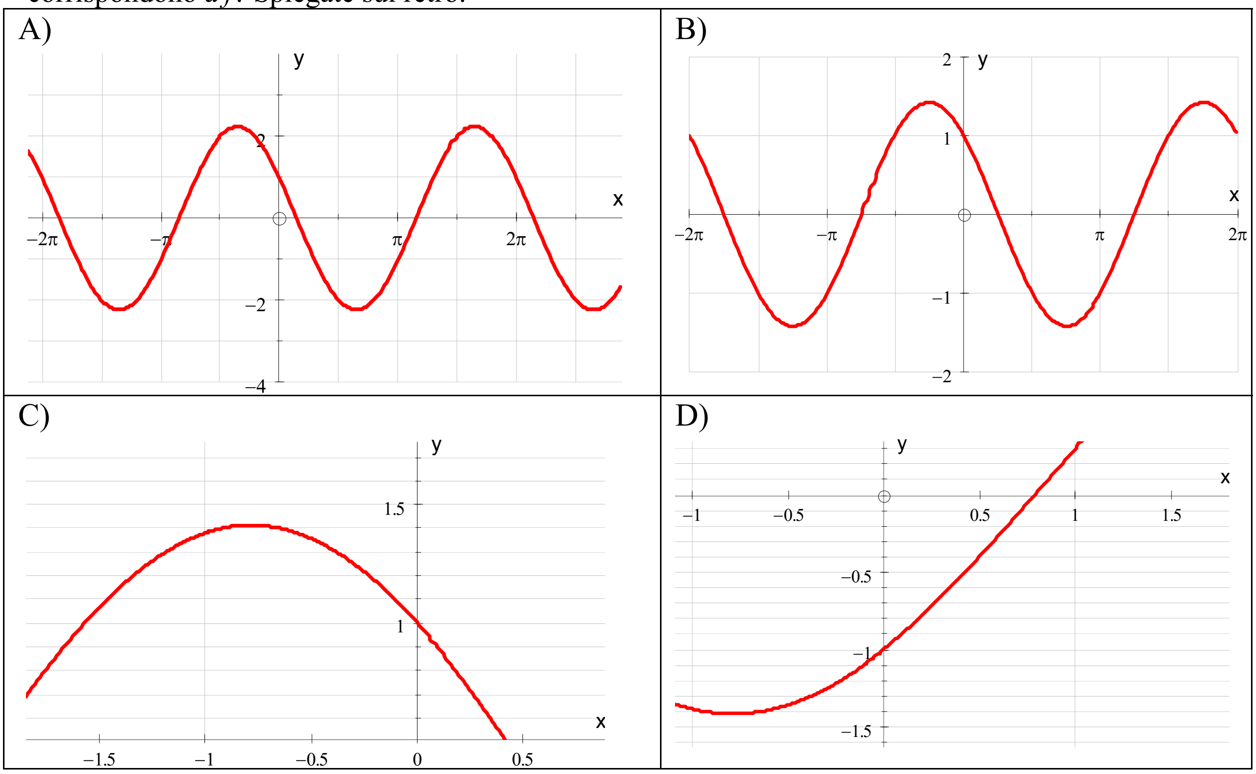
Problema

Considerate la funzione f definita su tutto $\mathbb{R}$ dall'equazione $f(x) = -\sin x + \cos x$.

Calcolate $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Per quali valori di x è verificata l'equazione $f(x)=0$?

In base a quello che potete vedere negli intervalli visualizzati, quali fra i grafici seguenti sicuramente non corrispondono a f? Spiegate sul retro.



Gli studenti potevano escludere il grafico A osservando che esso rappresenta una funzione che assume valori maggiori di 2 o minori di –2 e che non può essere quindi associato a f. Potevano anche escludere il grafico D attraverso il calcolo di $f(0)$. Non avevano modo di escludere né il grafico B né il C.

Va detto che nelle lezioni e nelle esercitazioni al calcolatore precedenti si è lavorato molto sul rapporto tra rappresentazione simbolica e grafica di una funzione, con attività centrate sul cambiamento di unità di misura e gli effetti visivi che comporta (uso dello zoom, ecc.), con le relative possibilità di inganno. Gli studenti erano abituati ad affrontare problemi di questo tipo; in particolare tutti i problemi affrontati erano formulati in negativo con la richiesta di escludere che grafici e equazioni simboliche si corrispondessero; è stato fatto rilevare, con esempi, anche svolti dagli studenti al calcolatore, che da una porzione di grafico è impossibile determinare l'equazione che definisce la funzione (ammesso che esista).

Mentre circa la metà del campione ha risolto il problema adeguatamente, altri hanno incontrato maggiori difficoltà, soprattutto in relazione a due questioni:

- Alcuni hanno interpretato la domanda come se fosse stata formulata in positivo ("… quali fra i grafici seguenti sicuramente corrispondono a *f*?").
- Alcuni hanno incontrato difficoltà nella collocazione del grafico C.

Riporto testualmente qualche esempio di risposta impropria.

- ✓ "Il 1° e 3° grafico invece nel valori x che corrispondono a $\frac{\pi}{4}$ $f(x)$ non assume il valore di 0."
- ✓ "Il 3° grafico non corrisponde alla funzione in quanto non presenta la funzione per valori negativi, $f(x)>0$;"
- ✓ "Perché i primi due grafici hanno valore ondulatorio, come le funzioni sin e cos, invece i due grafici sotto tendono a ∞, quindi non sono certamente loro."
- ✓ "Il grafico 1 e 3 sicuramente non corrispondono in quanto a $\frac{\pi}{2}$, la funzione vale –1 e dai grafici 1 e 3 la funzione non passa per –1."
- ✓ "Il 3 è il grafico di una parabola con concavità verso il basso."
- ✓ "Dei quattro grafici il secondo è l'unico a intersecare l'asse delle x in $\frac{\pi}{4}$."
- ✓ "Ho trovato che il grafico che coincide è il 2°, quindi per esclusione il terzo e il quarto non sono esatti."
- ✓ "A 0° cos=1 sin=0, a π cos=–1, sin=0 quindi il secondo grafico è quello giusto perché è l'unico che passa per quei punti."

Come per tutti i protocolli che riporto, in questa sede l'analisi dei comportamenti degli studenti è obiettivo prioritario rispetto alla valutazione dell'adeguatezza del metodo adottato, dei materiali presentati e perfino della situazione sperimentale. Gli studenti sono stati richiesti di interpretare testi che includevano rappresentazioni grafiche e hanno reagito in un certo modo che io voglio analizzare. Io non sto studiando una questione di psicologia dell'apprendimento matematico per cui si potrebbe obiettare che i dati non sono indicativi dei processi di pensiero. Io sto studiando comportamenti linguistici, e quelli riportati, in ogni caso, lo sono.

Gli aspetti che balzano agli occhi sono almeno due. Prima di tutto c'è il peso della convinzione secondo cui a una domanda si debba dare una risposta 'esatta' e in positivo, che induce diversi studenti non a escludere i grafici evidentemente incompatibili, ma a cercare quello 'corretto'. In secondo luogo, balza agli occhi la grande quantità di informazioni che gli studenti trovano nel grafico C: non passa per il punto $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$, né per $\left(\frac{\pi}{2},-1\right)$ né per $(\pi, -1)$ [tutti punti fuori dalla regione visualizzata]; è interamente contenuto nel semipiano delle y positive; rappresenta una funzione che "tende a ∞"; è una parabola.

Questi comportamenti possono essere interpretati in diversi modi: gli stereotipi visuali trasmessi dalla scuola e non solo da essa hanno certamente un peso, così come hanno un peso le loro convinzioni sulla matematica. Quello che per me è importante adesso è che hanno ricavato informazioni che non erano presenti nei disegni, quindi hanno svolto, più o meno esplicitamente, inferenze. Queste inferenze sono state pesantemente influenzate dal contesto: in un contesto diverso le inferenze prodotte sarebbero state diverse.

Con un diverso (e molto meno numeroso) gruppo di studenti che non avevano partecipato alla prova di cui sopra sono state svolte attività sistematiche di laboratorio, in orario pomeridiano.

Tra le attività proposte segnalo la seguente. Gli studenti hanno ricevuto un insieme di pezzi di carta ('tessere'), della stessa forma e dimensione, sui quali erano riportati tratti di grafici di funzioni. Il compito era: ricostruire il grafico della stessa funzione f definita sopra scegliendo le tessere

appropriate e scartando le altre. Le tessere sono state ottenute tagliando il grafico della funzione data insieme a quelli di due altre funzioni (una delle quali era la funzione del grafico A sopra).
Il modo di lavorare era il seguente: gli studenti non potevano fare prove di affiancamento di pezzi (come per comporre un puzzle) ma, scelta una tessera, dovevano decidere se prenderla o no in considerazione attraverso un ragionamento che veniva costruito collettivamente e poi verbalizzato.
Benché la situazione sia sostanzialmente differente dalla precedente (in particolare, le tessere rappresentavano pezzi di grafici tutti alla stessa scala), rimane a mio giudizio significativo il fatto che, nel discutere le tessere, nessuno ha fatto riferimento a proprietà non visualizzate sulle stesse. Gli studenti si sono focalizzati piuttosto sui valori assunti dai grafici sui bordi delle tessere. In questo caso il contesto di gioco ha probabilmente indotto inferenze diverse rispetto al contesto scolastico.
Questo esempio ha voluto soltanto mostrare come il contesto influenzi pesantemente anche l'interpretazione dei dati visuali, sollecitando diverse inferenze.

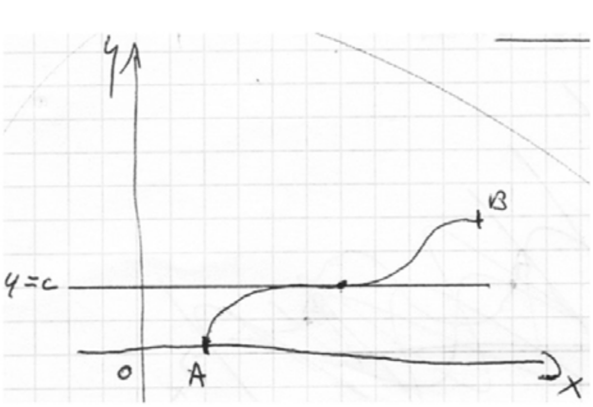
Esempio 11

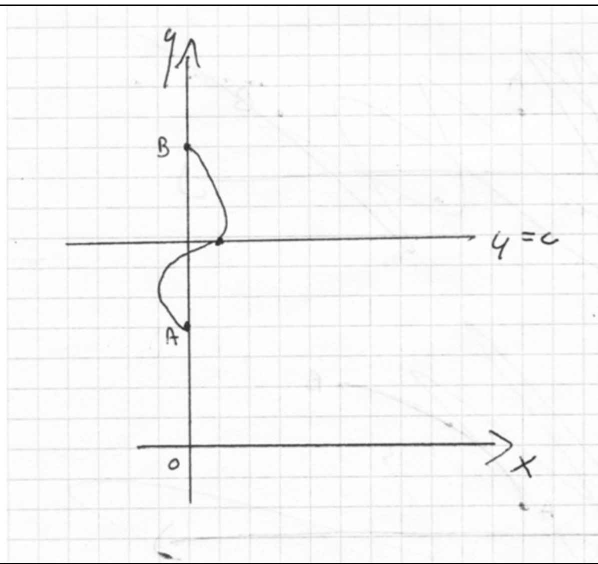
Nel corso di un'esercitazione di matematica al calcolatore a un piccolo gruppo di matricole di Biologia, in corrispondenza alla fase conclusiva del corso di Matematica, è stato chiesto di leggere il testo che segue, tratto da un libro di matematica rivolto a loro, e di ricostruire, sulla base del testo, il grafico presente originariamente e che era stato omesso. Prima di iniziare la costruzione del grafico, il testo è stato commentato e gli studenti lo hanno collegato con le loro conoscenze scolastiche.

> Abbiamo osservato che il grafico di una funzione continua in un intervallo non presenta interruzioni e potrebbe essere tracciato "senza staccare la matita dal foglio". Supponiamo nel seguito che f sia una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Quindi le ipotesi di partenza per la maggior parte dei prossimi risultati sono
>
> 1. f: $[a,b] \to \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$;
> 2. f continua in ogni punto $x \in [a,b]$.
>
> Proprio per la continuità il grafico della funzione f passando dal punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ "deve" passare almeno una volta per i punti di ordinata compresa tra $f(a)$ e $f(b)$.
>
> *Figura 2.13*
>
> Figura 2.13: Il grafico della funzione f deve attraversare la retta $y = c$ con c valore intermedio tra $f(a)$ e $f(b)$.

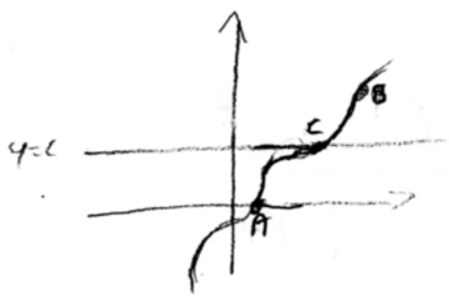
Ho scelto di riportare i disegni proposti da tre studenti, S1, S2, S3, che rappresentano bene i modelli di risposta più diffusi. Gli studenti S1 e S2 hanno proposto due disegni contemporaneamente, in alternativa.
Questo testo non dà indicazioni sulla posizione reciproca di $f(a)$ e $f(b)$ nella figura. La maggior parte degli studenti ha optato per $f(a)<f(b)$, o, più precisamente, per posizionare il punto etichettato in qualche modo con la lettera B in una posizione più 'alta' rispetto a quello etichettato con la A. Alcuni studenti (fra cui S3) hanno collocato i due punti alla stessa quota. Nessuno ha collocato il punto etichettato con B a una quota inferiore a quello etichettato con A.

S1-1	S1-2



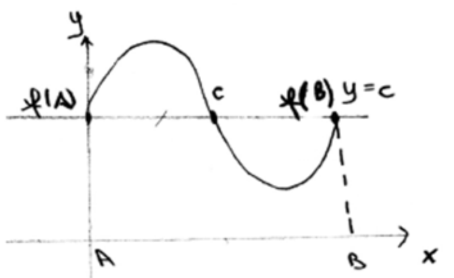


S2-1



S2-2

S3



Molti studenti sembrano interpretare l'enunciato del teorema come una relazione fra i punti del grafico piuttosto che fra le loro ordinate. I diversi esempi di grafici 'verticali' (come S1-2 e S2-2) mostrano probabilmente uno sforzo di coniugare l'ordinamento rappresentato metaforicamente dal testo (per cui il grafico viene associato a un particolare movimento) riguardo ai punti del grafico coll'ordinamento sulle loro ordinate (rappresentato dall'enunciato del teorema).

Lo studente S3 posiziona i punti *A, B* sull'asse delle ascisse ma evidentemente non interpreta *f(A), f(B)* come ordinate. Infatti tali etichette sembrano riferite al grafico piuttosto che all'asse delle ordinate (quasi si trattasse di una rappresentazione parametrica) e non c'è alcun accenno al fatto che dal grafico risulta $f(A)=f(B)=c$.

Questo esempio mostra la complessità delle conversioni da testo verbale a figura: studenti che avevano già visto il teorema nella secondaria superiore ed erano in grado di specificarne a parole il significato (quindi, apparentemente, lo 'sapevano') non sono riusciti a ricostruire una figura del tipo di quelle usualmente allegate nei libri di testo. Questo suggerisce che anche il controllo semantico sulle figure non sia soltanto una questione di intuizione e che siano riconoscibili anche a questo proposito diversi livelli.